Clase 7

Campo eléctrico

Distribuciones continuas de carga

Ejemplo 12: La esfera y las coordnadas esféricas

Integrales en regiones esféricas se realizan mas cómodamente en coordenadas esféricas. En estas coordenadas un punto se especifica por su distancia r al orígen y centro de la esfera, el angulo θ que el vector posición forma con el eje z y el ángulo φ que la proyeccion del vector posición sobre el plano xy forma con el eje x. Entonces tenemos,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \quad \theta = arctan(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}) \ , \quad \varphi = arctan(\frac{y}{x}) \ .$$

o equivalentemente

$$x = rsen\theta cos\varphi \ , \quad y = rsen\theta sen\varphi \ , \quad z = rcos\theta \ .$$

A partir de $\vec{\mathbf{r'}} = rsen\theta cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + rsen\theta sen\varphi\hat{\mathbf{y}} + rcos\theta\hat{\mathbf{z}}$ calculamos,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{dl}}_{\mathbf{r}} &= \frac{\partial\vec{\mathbf{r'}}}{\partial r}dr = \Big(sen\theta cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + sen\theta sen\varphi\hat{\mathbf{y}} + cos\theta\mathbf{y}\Big)dr \\
\vec{\mathbf{dl}}_{\theta} &= \frac{\partial\vec{\mathbf{r'}}}{\partial\theta}d\theta = \Big(rcos\theta cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + rcos\theta sen\varphi\hat{\mathbf{y}} - rsen\theta\mathbf{y}\Big)d\theta \\
\vec{\mathbf{dl}}_{\varphi} &= \frac{\partial\vec{\mathbf{r'}}}{\partial\varphi}d\varphi = \Big(-rsen\theta sen\varphi\hat{\mathbf{x}} + rsen\theta cos\varphi\hat{\mathbf{y}}\Big)d\varphi
\end{aligned}$$

El elemento de volumen vale

$$d\vec{\mathbf{S}} = \begin{vmatrix} sen\theta cos\varphi & sen\theta sen\varphi & cos\theta \\ -rcos\theta cos\varphi & rcos\theta sen\varphi & -rsen\theta \\ -rsen\theta sen\varphi & rsen\theta sen\varphi & 0 \end{vmatrix} drd\theta d\varphi = r^2 sen\theta drd\theta d\varphi$$

Calculamos el volumen de la esfera radio R,

$$V = \int dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 sen\theta drd\theta d\varphi = \frac{\pi R^3}{3}$$

Ejemplo 13: Cálculo del campo eléctrico producido por una distribución de carga esférica con densidad ρ constante en un punto a una distancia h de su centro.

Sea R el radio de la esfera. Supondremos $h > R$. Sin pérdida de generalidad podemos escoger el sistema de coordenadas con origen en el centro de la esfera y con el eje z pasando por el punto en el que queremos calcular el campo. Entonces,

$$\vec{\mathbf{r}}'(r', \theta, \varphi) = r' sen(\theta) cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r' sen(\theta) sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + r' cos(\theta)\hat{\mathbf{z}} \ , \quad \vec{\mathbf{r}} = h\hat{\mathbf{z}}$$

También,

$$\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}} = -r' sen(\theta) cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} - r' sen(\theta) sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + (h - r' cos(\theta))\hat{\mathbf{z}} \ ,$$

Por el teorema del coseno, o a partir de las componentes

$$|\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{r'^2 + h^2 - 2hr' cos(\theta)},$$

El campo eléctrico está dado por la integral,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}) dV' \\
&= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\Big(- r' sen(\theta) cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} - r' sen(\theta) sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + (h - r' cos(\theta)\hat{\mathbf{z}})\Big)}{\sqrt{(r'^2 + h^2 - 2hr' cos(\theta))^3}} dV'
\end{aligned}$$

Por la simetría del problema o haciendo las integrales en φ arriba para esas componentes también en este caso E_x y E_y se anulan. El campo apunta en la dirección z. Para la componente z queda

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(h - r' cos(\theta))}{\sqrt{(r'^2 + h^2 - 2hr' cos(\theta))^3}} r'^2 sen(\theta) dr' d\theta d\varphi \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(h - r' cos(\theta))}{\sqrt{(r'^2 + h^2 - 2hr' cos(\theta))^3}}
\end{aligned}$$

donde hemos hecho la integral en φ que es trivial.

Para la integral en θ hacemos el cambio de variables

$$u = (r'^2 + h^2 - 2hr' cos(\theta)) \ , \quad du = 2hr' sen(\theta) d\theta \ .$$

Entonces

$$r'(h - r' cos(\theta)) = \frac{r'}{2h}(u + (h^2 - r'^2) \ , \quad r' sen(\theta) d\theta = \frac{du}{2h}$$

Evaluando en los nuevos límites de integración llegamos a

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\rho}{8h^2\epsilon_0}\int_0^R\int_{(h-r')^2}^{(h+r')^2}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{(h^2-r'^2)}{\sqrt{u^3}}\right]r'dr'du \\
&= \frac{\rho}{8h^2\epsilon_0}\int_0^R\left[2\sqrt{u}-\frac{2(h^2-r'^2)}{\sqrt{u}}\right]\Bigg|_{(h-r')^2}^{(h+r')^2} r'dr' \\
&= \frac{\rho}{h^2\epsilon_0}\int_0^R r'^2dr' = \frac{\rho R^3}{3h^2\epsilon_0}
\end{aligned}$$

En términos de la carga total $Q = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ tenemos,

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{h^2}$$

El campo eléctrico de una esfera cargada para puntos $h > R$ corresponde al de una carga puntual con la carga total de la esfera colocada en el centro de la esfera. Éste resultado es análogo al que se encuentra para el campo gravitacional de una masa esférica.Para un punto cualquiera $\vec{\mathbf{r}}$ fuera del eje tendremos,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

El dipolo eléctrico

A nivel microscópico las cargas positiva y negativa en algunas moléculas suele estar ligeramente separada dando lugar a estructuras eléctricamente activas. Para sistemas de muchas partículas esto puede producir efectos a nivel macroscópico que estudiaremos cuando discutamos los materiales dieléctricos. Conviene introducir el concepto de dipolo eléctrico como un objeto rígido formado por dos cargas q y $-q$ separadas por una distancia D que se supone pequeña en la escala de los fenómenos ajo estudio. El dipolo eléctrico se describe en términos de su vector momento dipolar $\vec{\mathbf{p}}$ cuyo módulo es $p = qD$ y cuya dirección es aquella que va de la carga positiva a la negativa. Las lineas de campo de un dipolo eléctrico se obtienen de las lineas de campo del sistema de dos cargas en el limite en que la separación es pequeña. Si colocamos un dipolo eléctrico apuntando hacia el eje z positivo de un sistema de coordenadas vemos que hay una linea de carga que coincide con el eje z en direccion y sentido. Las demas lineas de campo salen de un extremo del dipolo y se van curvando hasta incidir perpendicularmente hacia abajo en el plano xy. Despues se continuan curvando y finalmente entran por el lado inferior al dipolo. El conjunto de lineas de campo tiene simetria axial alrededor del eje z. Alcanza entonces considerar la expresión del campo eléctrico para un punto en el plano xz para verificar la estructura de las lineas de campo mencionada.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1|^3}-\frac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2|^3}\Big] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{x\hat{\mathbf{x}}+(z-\frac{D}{2})\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x^2+(z-\frac{D}{2})^2)^3}}-\frac{x\hat{\mathbf{x}}+(z+\frac{D}{2})\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x^2+(z+\frac{D}{2})^2)^3}}\Big]\end{aligned}$$

Vemos de esta expresión que el campo eléctrico sore el eje z apunta en la direccion del mismo y que sore el eje x el campo apunta en la direccion z negativa.

Flujo Eléctrico y ley de Gauss

Flujo eléctrico

Dada una superficie cualquiera S definimos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie S como la integral

$$\Phi_S = \int_S \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r'}}).\vec{\mathbf{dS}}$$

Notamos que el integrando es una función escalar que se anula cuando $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r'}})$ y $\vec{\mathbf{dS}}$ son perpendiculares.

La superficie en la que calculamos el flujo es una superficie matemática independiente del sistema de cargas y que escogemos a nuestra conveniencia. En el caso en que la superficie es cerrada se escoge siempre el elemento de superficie apuntando hacia afuera de la superficie.

Si dibujamos las líneas de campo eléctrico de una configuración, el número de líneas que atraviesan una superficie nos da una idea del flujo eléctrico a través de la misma.

Campo constante

En un región con campo eléctrico constante si calculamos el flujo a través de una superficie plana de área A perpendicular al campo encontramos que $\vec{\mathbf{E}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = |\vec{\mathbf{E}}|dS$ y el flujo resulta ser $\Phi = |\vec{\mathbf{E}}|dS$. Si la superficie siendo aún plana es tal que $d\vec{\mathbf{S}}$ forma un ángulo α con el campo entonces $\vec{\mathbf{E}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = |\vec{\mathbf{E}}|cos(\alpha)dS$ y el flujo resulta ser $A|\vec{\mathbf{E}}|cos(\alpha)$. En particular si la superficie es paralela al campo el flujo se anula como intuitivamente podemos apreciar.

Carga puntual

Si consideramos una carga puntual q y una superficie esférica con centro en la carga vemos, usando coordenadas esféricas, que

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2} \quad , \quad d\vec{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{r}}R^2 sen\theta d\theta d\varphi$$

El campo y el vector $d\vec{\mathbf{S}}$ son paralelos sobre la superficie. El flujo queda

$$\Phi_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}$$